

Problem for the week of January 11, 2010

Let A and B be nonsingular $n \times n$ matrices. Prove that

$$\text{rank}(A - B) = \text{rank}(A^{-1} - B^{-1})$$

Solution

關鍵在於聯繫 $A - B$ 和 $A^{-1} - B^{-1}$, 觀察後不難得到下式:

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}$$

已知 A^{-1} 和 B^{-1} 是可逆的, 就有 $\text{rank}(B^{-1} - A^{-1}) = \text{rank}(A - B)$, 矩陣與非零常數相乘不改變矩陣秩, 故 $\text{rank}(A^{-1} - B^{-1}) = \text{rank}(B^{-1} - A^{-1})$, 證得原命題。補充解釋為何與可逆矩陣相乘不改變原矩陣的秩。設 A 為 $m \times m$ 階可逆矩陣, B 為 $m \times n$, 有這個事實: AB 和 B 的零空間相同, $N(AB) = N(B)$ 。證明如下: 若 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 顯然 $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。反之, 若 $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 同時左乘 A^{-1} , 就有 $A^{-1}AB\mathbf{x} = B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。再來利用秩-零度定理可得 $\text{rank}(AB) = n - \dim N(AB)$, $\text{rank}B = n - \dim N(B)$, 故 $\text{rank}(AB) = \text{rank}B$ 。另一方面, 若 BA 是合法運算, 且 A 是可逆的, 則利用上述結果以及 $\text{rank}A^T = \text{rank}A$, 就有 $\text{rank}(BA) = \text{rank}(BA)^T = \text{rank}(A^T B^T) = \text{rank}B^T = \text{rank}B$ 。 \square