Problem for the week of February 1, 2010

Let A be an $n\times n$ real symmetric positive definite matrix. If B is an $n\times m$ real matrix, show that B^TAB is positive semidefinite. Also show that $\mathrm{rank}(B^TAB)=\mathrm{rank}B$, so that B^TAB is positive definite if and only if B has rank m.

Solution

首先, 不難驗證 B^TAB 是對稱的。已知 A 是正定矩陣, 對於任意 m-維實數向量 $\mathbf{x}$, 我們有 $\mathbf{x}^TB^TAB\mathbf{x}=(B\mathbf{x})^TA(B\mathbf{x})\geq 0$, 因此得知 B^TAB 是半正定矩陣。上式的等號發生於 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 所以如果 $B\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, 必有 $\mathbf{x}^TB^TAB\mathbf{x}>0$。

注意, B 是 $n\times m$ 階矩陣, B^TAB 是 $m\times m$ 階矩陣。如果能證明 B^TAB 和 B 有相同的零空間, 根據秩–零度定理, 便有 $\mathrm{rank}(B^TAB)=\mathrm{rank}B$。若 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 很明顯, $B^TAB\mathbf{x}=\mathbf{0}$; 反之, 若 $B^TAB\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 則 $\mathbf{x}^TB^TAB\mathbf{x}=0$, 由前面結果推知 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$。最後我們證明若 $\mathrm{rank}B=m$ 則 B^TAB 是正定。若 $\mathrm{rank}B=\mathrm{rank}(B^TAB)=m$, B^TAB 是滿秩, 所有特徵值皆不爲零, 因此是正定矩陣, 反向陳述也同樣成立。 $\square$